**5. Основные содержательные цели. Организация самостоятельной деятельности учащихся по открытию новых знаний.**

**§1. Теория множеств.**

**П. 1.1.1. Основные понятия теории множеств. Числовые множества**

**Основные содержательные цели**:

1. Уточнить понятие множества, его элементов, подмножества, пустого множества.
2. Сформировать понятия равных множеств, соответствия между множествами, взаимно однозначного соответствия между множествами и эквивалентных множеств.
3. Повторить способы решения линейных уравнений, систем линейных уравнений с двумя неизвестными, квадратных уравнений. Закрепить умение выполнять перевод десятичной дроби в обыкновенную и обратно.

Для **самостоятельного** **открытия** понятия равных множеств рекомендуется выполнить №1 – №4.

**П. 1.1.2. Операции над множествами**

**Основные содержательные цели**:

1. Уточнить понятия пересечения и объединения множеств, сформировать понятие дополнения и разности множеств.
2. Уточнить представления учащихся о применении этих понятий при выполнении различных заданий.
3. Повторить способ решения системы и совокупности неравенств и уравнений, уточнить способ нахождения области определения алгебраической дроби.
4. Закрепить умение выполнять преобразования дробно-рациональных выражений, использовать теорему Виета и обратную ей теорему, решать задачи с помощью дробно-рационального уравнения.

Для **самостоятельного** **открытия** понятия дополнения множества рекомендуется выполнить №29. Для **самостоятельного** **открытия** понятия разности множеств рекомендуется выполнить №30– №31.

Отметим, что учитель *выбирает только одно знание* для организации самостоятельного его открытия учащимися, остальные знания вводятся учителем, например, путем подводящего диалога.

**П. 1.1.3\*. Счетные и несчетные множества**

**Основные содержательные цели**:

1. Сформировать понятие счетного и несчетного множеств.
2. Сформировать представление о счетности множества рациональных чисел и несчетности множества действительных чисел.
3. Закрепить умение решать рациональные уравнения. Повторить понятие дизъюнкции и конъюнкции высказываний.

Для повторения понятий бесконечного и конечного множеств, понятия эквивалентности множеств рекомендуется выполнить №56–№57. Для **самостоятельного** **открытия** свойства объединения двух множеств, эквивалентных ***N*** рекомендуется выполнить №58.

**П. 1.1.4. Применение понятий теории множеств.**

**Основные содержательные цели**:

1. Сформировать представление о взаимосвязи различных разделов математики друг с другом на примере применения понятий теории множеств в других теориях.
2. Уточнить определение функции и определение вероятности случайного события с точки зрения теории множеств.
3. Закрепить умение решать рациональные уравнения и умение анализировать график.

Выполнение заданий №73 – №75 направлено на актуализацию понятия функция. Для **самостоятельного выявления** взаимосвязи понятий взаимно однозначное соответствие и функция рекомендуется выполнить №76 – №78. Для **самостоятельного уточнения понятия** функции используется №79, после того как учащимися будут озвучены свои примеры нечисловых функций рекомендуется познакомить их с примерами, разобранными в учебнике. Для **самостоятельной формулировки** учащимисянового определения вероятности случайного события рекомендуется выполнить №80.

Еще раз подчеркнем, что учитель *выбирает только одно знание* для организации самостоятельного его открытия учащимися, остальные знания вводятся учителем, например, путем подводящего диалога.

**§ 2. Элементы комбинаторики и теории вероятностей.**

**П.1.2.1. Перестановки с повторениями**

 **Основные содержательные цели**:

1. Построить правило подсчета количества перестановок элементов, среди которых есть одинаковые и сформировать умение его применять.
2. Сформировать понятие перестановки с повторениями. Вывести общую формулу количества перестановок и сформировать умение ее применять.
3. Закрепить умение доказывать неравенства и находить наименьшее (наибольшее) значение выражений с помощью доказанных неравенств. Повторить понятие графика функции, закрепить умение работать с графиками и использовать их для решения уравнений.

Для **самостоятельного** **открытия** способа подсчета количества перестановок элементов, среди которых есть одинаковые, рекомендуется выполнить №97 – №98.

**П. 1.2.2. Размещения**

**Основные содержательные цели**:

1. Построить способ подсчета количества вариантов выбора в определенном порядке *k* элементов из *n* и сформировать умение его применять.
2. Сформировать понятие размещения, познакомить учащихся с обозначениями, принятыми в комбинаторике и формулой числа размещений.
3. Тренировать умение подсчитывать число перестановок с повторениями и без повторений. Закрепить умение выполнять преобразования выражений с корнями. Повторить понятие четной и нечетной функции, способы построения графиков функций и закрепить умение использовать их для решения систем уравнений с двумя неизвестными.

Для **самостоятельного** **открытия** способа подсчета количества вариантов выбора в определенном порядке *k* элементов из *n* рекомендуется выполнить №117.

**П. 1.2.3. Сочетания**

**Основные содержательные цели**:

1. Построить способ подсчета вариантов выбора *k* элементов из *n*-элементного множества, когда порядок чисел не существенен, и сформировать умение его применять.
2. Сформировать понятие сочетания, познакомить учащихся с обозначениями, принятыми в комбинаторике и формулой числа сочетаний.
3. Сформировать представление о биномиальных коэффициентах, как о числах определенного вида и о некоторых их свойствах.
4. Тренировать умение находить число вариантов выбора в определенном порядке *k* элементов из *n*. Закрепить умение выполнять преобразования выражений с корнями. Повторить способы решения рациональных уравнений.

Для **самостоятельного** **открытия** способа подсчета вариантов выбора *k* элементов из *n*-элементного множества, когда порядок чисел не существенен, рекомендуется выполнить №136 – №138.

**П. 1.2.4. Применение комбинаторики при решении вероятностных задач. Геометрическая вероятность.**

**Основные содержательные цели**:

1. Сформировать понятие геометрической вероятности.
2. Сформировать умение применять комбинаторные и геометрические рассуждения при решении задач на поиск вероятности.
3. Повторить понятия достоверного, невозможного и случайного событий, понятия совместных и несовместных событий. Закрепить умение применять теорему Виета и обратную ей теорему, умение решать уравнения с параметром, находить наименьшее и наибольшее значение квадратного трехчлена на заданном отрезке.

Для **самостоятельного** **открытия** способа применения комбинаторики при решении задач на поиск вероятности рекомендуется выполнить №162 – №164. Для **самостоятельного** **открытия** способа применения геометрических рассуждений при решении задач на поиск вероятности рекомендуется выполнить №171.

**§3\*. Метод математической индукции.**

**П. 1.3.1\*. Принцип математической индукции.**

**Основные содержательные цели**:

1. Уточнить представления учащихся об индуктивном способе рассуждений.
2. Познакомить учащихся с принципом математической индукции, как со способом доказательства свойства элементов бесконечных множеств.
3. Построить алгоритм доказательства утверждений методом математической индукции и умение его применять.
4. Закрепить умение подсчитывать количество сочетаний, выполнять преобразования выражений с корнями, решать неравенства методом интервалов.

Для **самостоятельного** **открытия** метода математической индукции рекомендуется выполнить №203, задания №200 – №202 готовит учащихся к этому открытию.

**П. 1.3.2\*. Применение метода математической индукции в разных задачах.**

**Основные содержательные цели**:

1. Сформировать умение применять метод математической индукции при решении различных задач.
2. Закрепить умение решать задачи на числа подсчет вариантов, решать и доказывать неравенства.

Рекомендуется организовать изучение данного пункта, в форме уроков рефлексии.

**6. Методические рекомендации по планированию уроков**

При изучении первой главы (как и всех остальных глав учебника) планированием предусмотрены уроки открытия нового знания (ОНЗ), структура которых обеспечивает выполнение учащимися целого комплекса универсальных учебных действий.

Рассмотрим способ организации урока ОНЗ на примере содержания пункта 1.1.1. «Основные понятия теории множеств. Числовые множества».

В этом пункте учащиеся уточняют понятие множества, его элементов, подмножества, пустого множества и знакомятся с понятием равных множеств. Здесь же учащиеся уточняют свои представления о важнейшем понятии теории множеств – соответствии между множествами, знакомятся с определением взаимно однозначного соответствия между множествами и определением эквивалентных множеств.

Урок открытия новых знаний выстраивается в соответствии с требованиями технологии деятельностного метода Л.Г. Петерсон. На этапе *мотивации* учитель может рассказать учащимся о понятии множества, как одном из наиболее общих математических понятий, позволяющих выявить общие свойства объектов из самых разных областей знаний. Далее учитель может предложить учащимся вспомнить, где они использовали данное понятие, после чего сделать вывод о важности уточнения имеющихся у учеников представлений об этом понятии. Рекомендуется попросить учащихся озвучить свои предположения о теме сегодняшнего урока.

После чего учитель организует актуализацию известных понятий: множество и его элемент и предлагает выполнить задание №1. Для самостоятельного открытия понятия равных множеств можно использовать №3 – № 4.

Рассмотрим пример*структуры открытия нового знания:*

*1. Новое знание:* понятие равных множеств.

*2. Актуализация.*

*Повторить:* понятие множества и его элементов.

*3. Задание на пробное действие:*

Как можно назвать множества *А* и *В* из задания №3?

*4. Фиксация затруднения*:

Я не могу сказать, как называются множества *А* и *В* из задания №3.

Я не могу обосновать, что мой ответ верный.

*5. Фиксация причины затруднения*:

Я не знаю, как называются такие множества.

*6. Цель учебной деятельности:*

Выявить, как называются множества *А* и *В* из задания №3 и все подобные им множества.

*7. Фиксация нового знания:*

Учащиеся должны построить определение равных множеств.

*Открыть* новое знание учащиеся на основании наблюдений, проведенных при сопоставлении элементов равных множеств с использованием текста задания №4. Далее учитель знакомит учащихся с остальными новыми для девятиклассников понятиями: вводится определение взаимно однозначного соответствия между множествами и определение эквивалентных множеств.

На *этапе первичного закрепления* рекомендуется выполнить задание №6, 7(а, в), в подготовленном классе можно выполнить № 5; для *самостоятельной работы* учащимся можно предложить №7 (б).

На *этапе включения в систему знаний* учитель предлагает учащимся № 8, в более подготовленном классе можно выполнить № 9.

Для *повторения* рекомендуется выполнить № 10 – №14. На этапе *рефлексии* можно обратиться к эпиграфу и предложить учащимся прокомментировать его с точки зрения содержания сегодняшнего урока. После чего учащимся предлагается оценить процесс и результат своей работы на уроке.

Кроме урока открытия нового знания, основные структурные элементы которого рассмотрены выше, планированием предусмотрены и другие типы уроков: *уроки рефлексии тренировочного и коррекционного типа*, где учащиеся вырабатывают и закрепляют свое умение применять новые понятия и способы действий, учатся самостоятельно выявлять и исправлять свои ошибки, корректировать свою учебную деятельность.

В первой главе учащимся предлагается экспресс-тест, который можно использовать для урока рефлексии или в качестве домашней работы.

Планированием также предусмотрены и уроки *обучающего контроля*. Перед проведением контрольной работы рекомендуется провести урок рефлексии с использованием содержания соответствующего раздела «Задачи для самоконтроля».

**Уважаемые коллеги!**

**Далее мы предлагаем рассмотреть примеры решения некоторых заданий первой главы.**

**№5.**

а) Чтобы показать, что дробь  помимо своего естественного представления, в виде конечной десятичной дроби  = 0,4 имеет еще одно представление в виде периодической дроби с девяткой в периоде: = 0,3999…= 0,3(9), необходимо перевести данную периодическую дробь в обыкновенную.

0,3(9) = *х*

3,9(9) = 10*х*

9*х* = 3,6

*х* = .

б) Запишем обыкновенные дроби ; ;  в виде десятичной дроби двумя способами.

= 0,5 = 0,4(9); = 0,75 = 0,74(9); = 0,16 = 0,15(9).

Можно проверить эти равенства путем перевода периодической дроби в обыкновенную, распределив их между группами учащихся.

в) Конечную десятичную дробь (с ненулевой дробной частью) можно представить в виде периодической дроби: для этого цифру последнего разряда уменьшают на единицу, и приписывают справа бесконечное число девяток.

Для целых чисел этот способ может быть сформулирован следующим образом: целое число уменьшают на единицу и приписывают после запятой бесконечное число девяток.

2) Множества *А* = {3,(7); 2,1(34); 0,2(348); 0,7(9)} и *В* = {; ; ; } не являются равными. Переведя обыкновенные дроби из множества *B* в десятичные, мы не получим такие же элементы, как в множестве *А*, так как = 3,(7), =2,1(34), =0,7(9), но  ≠ 0,2(348).

**№27**.

а) | *x*2 – 5*x* | < 6

Модуль числа меньше 6, если это число принадлежит интервалу от – 6 до 6.

| *x*2 – 5*x* | < 6 ⇔ – 6 < *x*2 – 5*x* < 6 ⇔ 

Укажем множество решений первого неравенства:

6

+

+

–

–1

*х*

Укажем множество решений второго неравенства:

3

+

+

–

2

*х*

Найдем пересечение множеств решений двух неравенств: (–1; 2) ⋃ (3; 6).

*Ответ:* (–1; 2) ⋃ (3; 6).

б) | 2*х*2 – 9*х* + 15 | ≥ 20

Модуль числа больше или равен 20, если это число больше или равно 20, либо меньше или равно –20.

| 2*х*2 – 9*х* + 15 | ≥ 20 ⇔

Однако 2*х*2 – 9*х* + 15 > 0 при *х* ∈ ***R***, так как *а* = 2 > 0 и *D* = –39 < 0.

Поэтому решаем одно неравенство:

2*х*2 – 9*х* + 15 ≥ 20

2*х*2 – 9*х –* 5 ≥ 0

*D* = (–9)2 – 4·2·(–5) = 121 > 0, два корня.

, 

2*х*2 – 9*х –* 5 = 2(*х* – 5)(*х* + ) = (*х* – 5)(2*х* +1)

*х*

–

+

–0,5

5

+

Решением неравенства является объединение двух множеств решений:

(–∞; –0,5] ⋃ [5; +∞).

*Ответ:* (–∞; –0,5] ⋃ [5; +∞).

**№58.**

1) а) Можно.

1) б) Переселим всех постояльцев гостиницы следующим образом. Если человек занимал комнату с номером *n*, то переселим его в комнату с номером 2*n*. Таким образом, все комнаты с нечетными номерами станут свободными.

Покажем, что в эти комнаты можно поселить столько же постояльцев. Для этого дублируем каждого постояльца. Тогда в номерах с номерами 2, 4, 6, …, 2*k*, … живут по два человека. Теперь по одному человеку-дублю из каждой комнаты с номером 2*n* можно переселить в комнату 2*n*–1. То есть можно считать, что всех «дублей» мы заново заселили в гостиницу. А их столько же, сколько и было постояльцев.

2) Учащиеся могут доказать это свойство по аналогии с рассуждениями, проведенными в пункте 1(б) задания. После этого их можно познакомить с другим способом ее доказательства, представленным в учебнике (см. теорему 3.2).

**№59.**

а) Покажем сначала, что множество целых чисел счетно. Для этого установим взаимно однозначное соответствие между целыми числами и натуральными. Сделаем это следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
| Целое число | Натуральное число |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| -1 | 3 |
| 2 | 4 |
| –2 | 5 |
| … | … |
| *n* | 2*n* |
| –*n* | 2*n* +1 |
| … | … |

Таким образом, каждому целому числу мы поставили в соответствие натуральное, причем все натуральные числа использованы.

Теперь завершить доказательство можно, заметив, что множество целых чисел, дающих при делении на 4 остаток 1, является бесконечным подмножеством счетного множества. Значит, по теореме 2 оно счетно.

б) Занумеруем рациональные числа , и составим бесконечную таблицу, в которую запишем все точки плоскости с двумя рациональными координатами и занумеруем их натуральными числами следующим образом (это очень похоже на то, как мы нумеровали рациональные числа):

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| вторая координатапервая координата | *a*1 | *a*2 | *a*3 | *a*4 | …  |
| *a*1 | 1 | 2 | 9 | 10 | … |
| *a*2 | 4 | 3 | 8 | 11 | … |
| *a*3 | 5 | 6 | 7 | 12 | … |
| *a*4 | 16 | 15 | 14 | 13 | … |
| … | … | … | … | … | … |

**№75.**

а) *у* = .

1. Поскольку правило, по которому задается функция, задается с помощью алгебраической дроби, найдем те значения *х*, при которых знаменатель дробного выражения равен нулю, а затем исключим их из множества действительных чисел.

.

*D*(*f*) = (–∞; –4) ⋃ (–4; 0) ⋃ (0; +∞).

2. Чтобы построить график функции, преобразуем алгебраическую дробь:

–4

0

*х*

*у*

*у = ,*

*х ≠* 0*, х ≠* –4

1

.

Построим график функции *у* =  с учетом области определения данной функции.

Графиком является гипербола *у* =  с «выколотой» точкой (–4; –).

в) *у* = .

1. Поскольку правило, по которому задается функция, задается с помощью алгебраической дроби, найдем те значения *х*, при которых знаменатель дробного выражения равен нулю, а затем исключим их из множества действительных чисел.

.

*D*(*f*) = (–∞; –2) ⋃ (–2; 3) ⋃ (3; +∞).

2. Чтобы построить график функции, преобразуем алгебраическую дробь:



0

–4

6

–

*х*

*у*

*у=* ,

*х ≠ –*2, *х ≠ 3*

–3

1



3

–2

Построим график функции *у* =  с учетом области определения данной функции.

1) , 

(;) координаты вершины параболы;

2

2) *у* =  ⇔ *у* = 

Построим параболу, выполняя параллельный перенос параболы *у* =  влево вдоль оси *Ох* на  единицы и вниз вдоль оси *Оу* на  единицы.

3. Дополнительные точки:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *х* | –3 | –2 | 0 | 2 | 3 |
| *у* | 0 | –4 | –6 | 0 | 6 |

Графиком является парабола с двумя «выколотыми» точками (–2; –4) и (3; 6).

**№101.**

Если в слове нет букв Б, то получается 1 слово только из 5 букв А.

В случае одной буквы Б, имеем всего 6 букв, из которых 5 одинаковые, тогда по общей формуле количества перестановок получим ответ:  6.

В случае двух букв Б, имеем всего 7 букв, из которых А встречается 5 раз, а Б – 2 раза, тогда по общей формуле количества перестановок получим ответ:  = 21.

В случае трех букв Б, имеем всего 8 букв, из которых А встречается 5 раз, а Б – 3 раза, тогда по общей формуле количества перестановок получим ответ:  = 56.

1+6 +12 + 56 = 75.

Ответ: 75 «слов».

**№121**.

Для ответа на вопрос задачи нужно разместить всеми возможными способами в определенном порядке по 3 фотографии из 6 и по 3 фотографии из 8.

Значит, искомое число способов равно числу размещений по 3 элемента из 6 и по 3 элемента из 8: **=6 ⋅ 5 ⋅ 4 = 120 и **=8 ⋅ 7 ⋅ 6 = 336.

*Ответ*: 6 фотографий можно разложить 120 способами, а 8 фотографий – 336 способами.

**№142.**

а) Если на табло горят цифры *ab.cd.mn*, то , так как . Поэтому . Но тогда *a* = 0 или 1, *c* = 0, 1, 2, 3, 4, 5, *m* = 0, 1, 2, 3, 4, 5. Всего получается 2 ∙ 6 ∙ 6 = 72 подходящих набора цифр, а каждый набор горит 1 секунду.

б) Если на табло горят цифры *ab.cd.mn*, то , поэтому возможны 5 случаев, когда одна из цифр *b*, *c*, *d*, *m*, *n* не равна 3, а остальные равны 3.

1) На табло *ab*.33.33, где . Таких наборов 21.

2) На табло *a*3.*c*3.33, где . Здесь *a* может принимать любое из трех значений 0, 1 или 2, *c* – любое из пяти значений 0, 1, 2, 4 или 5. Таких наборов 3 ∙ 5 = 15.

3) На табло *a*3.3*d*.33, где . Здесь *a* = 0, 1, 2, *d* = 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, всего 3 ∙ 9 = 27 наборов.

4) *a*3.33.*m*3 – 15 наборов.

д) *a*3.33.3*n* – 27 наборов.

Всего 21 + 15 + 27 + 15 + 27 = 105 наборов, каждый из которых горит 1 секунду.

в) Если на табло горят цифры *ab.cd.mn*, то *a* = 0, 1, 2; , , , , . Поэтому если *a*=*n*, *b*=*m*, *c*=*d*, то симметричное число на табло однозначно определяется по цифрам *a*, *b* и *c*, где а = 0, 1, 2; , . При этом если а = 0 или 1, то *b* и *c* – любые цифры от 0 до 5, количество таких наборов чисел равно 2 ∙ 6 ∙ 6 = 72. Если же а = 2, то *b* = 0, 1, 2, 3; , и количество таких наборов равно 4 ∙ 6 = 24. Всего 72 + 24 = 96 наборов чисел, каждый из которых горит 1 секунду.

Ответ: а) 72 с; б) 105 с; в) 96 с.

**Ниже мы предлагаем вам рассмотреть решение некоторых задач на смекалку, которые входят в первую главу.**

**№21.\***

По прошествии 6 часов минутная стрелка находится в исходном положении, а часовая поворачивается на 180°.

Ответ: 6 часов.

**№54.\***

а) Приведем примеры симметрической разности двух множеств.

1) Пусть ***А*** – множество натуральных чисел, делящихся на 3, ***В*** – множество четных натуральных чисел. Тогда ***А***\***В*** – множество натуральных чисел, дающих при делении на 6 остаток 3; ***В***\***А*** – множество натуральных чисел, дающих при делении на 6 остатки 2 или 4; ***В******А***=***А******В*** – множество натуральных чисел, дающих при делении на 6 остатки 2,3,4.

2) Пусть ***А*** – множество учеников 9А класса, ***В*** – множество мальчиков, учащихся в 9А и 9Б классах. Тогда ***А***\***В*** – множество девочек, учащихся в 9А классе, ***В***\***А*** – множество мальчиков, учащихся в 9Б классе, ***А******В*** – объединение множеств ***А***\***В*** и ***В***\***А***, то есть множество девочек, учащихся в 9А классе и множество мальчиков, учащихся в 9Б классе.

3) Пусть ***А*** – множество прямоугольников на плоскости. ***В*** – множество ромбов на плоскости. Тогда ***А***\***В*** – множество прямоугольников, не являющихся квадратами, ***В***\***А*** – множество ромбов, не являющихся квадратами, ***А******В*** – объединение множеств ***А***\***В*** и ***В***\***А***, то есть множество прямоугольников, не являющихся квадратами и множество ромбов, не являющихся квадратами.

б) Обозначим части множеств ***А*, *В*, *С*** как показано на рисунке.

***А***

***В***

***С***

***Х1***

***Х2***

***Х3***

***Х4***

***Х5***

***Х6***

***Х7***

Тогда (***А******С***) ***= X*1** ***X*3** ***X*5** ***X*6**, (***В******С***) ***= X*2** ***X*3** ***X*4** ***X*6**.

Отсюда (***А******С***) ***∩*** (***В******С***) ***= X*3*****X*6**.

Теперь (***А∩В***) ***= X*6** ***X*7**. Отсюда (***А∩В***)***С = X*3** ***X*4** ***X*5** ***X*6**.

Поэтому (***А******С***) ***∩*** (***В******С***) ***= X*3*****X*6** ***X*3** ***X*4** ***X*5** ***X*6**=(***А∩В***)***С***.

**№159\*.**

В первую команду 6 человек можно выбрать  способами. Из оставшихся 18 человек во вторую команду 6 человек можно выбрать  способами. Из оставшихся 12 человек в третью команду 6 человек можно выбрать  способами. А четвертая команда определится однозначно. Таким образом, получилось  способов. Но порядок команд не важен, поэтому найденное число нужно поделить на 4! – число способов упорядочить четыре команды. Значит, искомое число способов .

Ответ: .