**5. Основные содержательные цели. Организация самостоятельной деятельности учащихся по открытию новых знаний.**

**§1. Последовательности и их общие свойства**

**П. 3.1.1. Последовательности. Способы задания последовательностей**

**Основные содержательные цели**:

1. Уточнить представления учащихся о бесконечной числовой последовательности, об использовании индексных обозначений.
2. Сформировать понятие членов последовательности, общего члена последовательности.
3. Познакомить учащихся со способами задания последовательности: аналитическим (рекуррентной формулой или формулой общего члена), перечислением ее членов или словесным описанием.
4. Сформировать умение находить члены последовательности, заданной формулой *n*-го члена.
5. Сформировать умение находить члены последовательности, заданной рекуррентно
6. Закрепить умение выполнять преобразования дробно-рациональных выражений.

Для **самостоятельного** **открытия** аналитического способа задания последовательности (рекуррентной формулой, формулой общего члена) рекомендуется выполнить №464 – №466.

**П. 3.1.2.\* Свойства последовательностей: монотонность, ограниченность**

**Основные содержательные цели**:

1. Сформировать понятие монотонных последовательностей и ограниченных последовательностей.
2. Сформировать умение исследовать на монотонность последовательности.
3. Сформировать умение *доказывать* ограниченность последовательностей, используя определение
4. Тренировать умение находить члены последовательности, заданной формулой *n*-го члена. Закрепить умение делить многочлены в столбик.

Для **самостоятельного** **открытия** понятия возрастающей и убывающей последовательностей рекомендуется выполнить №488. Выполнение № 487 готовит это открытие, актуализируя понятие возрастающих и убывающих функций.

Для **самостоятельного** **открытия** одного из способов исследования последовательности на монотонность (путем рассмотрения знака разности *хn* + 1 – *хn*) рекомендуется выполнить задание №489. Выполнение задания №486 актуализирует способ, аналогичный новому, он использовался учащимися в 8 классе при доказательстве неравенства (они рассматривали знак разности левой и правой частей неравенства).

**§ 2. Арифметическая прогрессия**

**П. 3.2.1. Арифметическая прогрессия. Формула общего члена**

**Основные содержательные цели**:

1. Сформировать понятие арифметической прогрессии, ее разности.
2. Вывести формулу общего члена арифметической прогрессии и сформировать умение ее применять.
3. Познакомить учащихся со свойствами и признаками арифметической прогрессии.
4. Тренировать умение находить члены последовательности, заданной формулой *n*-го члена. Тренировать умение исследовать последовательности на ограниченность. Закрепить умение решать дробно-рациональные уравнения.

Для подготовки введения понятия арифметической прогрессии рекомендуется повторить способ решения задач на простой процентный рост (№500). Для введения понятия арифметической прогрессии, разности арифметической прогрессии и их первичного закрепления можно воспользоваться заданиями № 501 – №502. Для **самостоятельного** **вывода** формулы общего члена арифметической прогрессии рекомендуется выполнить №503.

**П. 3.2.2. Сумма первых *n* членов арифметической прогрессии.**

**Основные содержательные цели**:

1. Вывести формулы суммы первых *n* членов арифметической прогрессии:

*Sn* =  и *Sn* = , где *n* = 1; 2; 3; … .

и сформировать умение их применять.

1. Тренировать умение решать задачи на использование понятия арифметической прогрессии и формулы ее общего члена. Закрепить умение решать задачи с помощью дробно-рационального уравнения.

Для более подготовленных учащихся с помощью задания № 536 можно организовать самостоятельный вывод следующего свойства:

если *an* – арифметическая прогрессия и *b* + *c* = *d* + *e* (*b*, *c*, *d*, *e* ∈ *N*), то *аb* + *аc* = *аd*+ *аe.*

Далее учащихся нужно познакомить со следствием этого свойства: в конечной арифметической прогрессии сумма членов, равноудаленных от крайних ее членов, равна сумме крайних ее членов. Иначе это свойство можно сформулировать следующим образом: попарные суммы членов *Sn* арифметической прогрессии, равноудаленных от ее начала *х*1 и конца *хn*, всегда равны. В дальнейшем это свойство будет осознанно использоваться учащимися при выводе формулы суммы первых *n* членов арифметической прогрессии. Для общеобразовательных классов знакомство с этим свойством в явном виде не является обязательным, оно поясняется учителем при выводе формулы суммы.

Для проблематизации и уяснения смысла задачи поиска суммы первых *n* членов арифметической прогрессии можно использовать №537.

Для **самостоятельного** **вывода** формулы суммы первых *n* членов арифметической прогрессии рекомендуется выполнить №538. В общеобразовательном классе эту формулу выводит учитель в подводящем диалоге.

**§3. Геометрическая прогрессия.**

**П.3.3.1. Геометрическая прогрессия. Формула общего члена.**

**Основные содержательные цели**:

1. Сформировать понятие геометрической прогрессии, ее знаменателя.
2. Вывести формулу общего члена геометрической прогрессии и сформировать умение ее применять.
3. Познакомить учащихся со свойствами и признаками геометрической прогрессии.
4. Тренировать умение применять формулу суммы и формулу общего члена арифметической прогрессии при решении задач. Закрепить умение решать квадратные неравенства.

Для подготовки введения понятия геометрической прогрессии, знаменателя геометрической прогрессии можно воспользоваться заданиями № 567 – №569. Для введения понятия геометрической прогрессии, знаменателя геометрической прогрессии используется № 570. Для **самостоятельного** **вывода** формулы общего члена геометрической прогрессии рекомендуется выполнить №571.

**П. 3.3.2. Сумма первых *n* членов геометрической прогрессии**

**Основные содержательные цели**:

1. Вывести формулу суммы первых *n* членов геометрической прогрессии:

*Sn* **=**, где *q*≠ 1, *n* = 1, 2, ...

и сформировать умение ее применять.

1. Тренировать умение решать задачи на использование понятия геометрической прогрессии и формулы ее общего члена. Закрепить умение решать рациональные неравенства методом интервалов.

Для проблематизации и уяснения смысла задачи поиска суммы первых *n* членов геометрической прогрессии можно использовать №600. Для **самостоятельного** **вывода** формулы суммы первых *n* членов арифметической прогрессии рекомендуется выполнить №601. В общеобразовательном классе эту формулу выводит учитель в подводящем диалоге.

**П. 3.3.3\*. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии**

**Основные содержательные цели**:

1. Сформировать понятие бесконечно убывающей геометрической прогрессии.
2. Вывести формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

*S* =, где | *q* | <1

и сформировать умение ее применять.

1. Тренировать умение применять формулу суммы первых *n* членов геометрической прогрессии. Закрепить умение решать дробно-рациональные неравенства методом интервалов.

Для повторения формулы суммы первых *n* членов геометрической прогрессии рекомендуется выполнить №624. Для подготовки введения понятия бесконечно убывающей геометрической прогрессии и задачи поиска суммы ее членов можно использовать №625.

**П. 3.3.4\*. Линейные рекуррентные соотношения.**

**Основные содержательные цели**:

1. Сформировать понятие арифметико-геометрической прогрессии и формулы ее общего члена.
2. Сформировать представление о линейных рекуррентных соотношениях первого и второго порядка.
3. Тренировать умение применять формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Закрепить умение доказывать неравенства.

Для **самостоятельного** **открытия** понятия арифметико-геометрической прогрессии рекомендуется выполнить №640.

**6. Методические рекомендации по планированию уроков**

При изучении третьей главы планированием предусмотрены уроки ОНЗ, структура которых обеспечивает выполнение учащимися целого комплекса универсальных учебных действий. Рассмотрим способ организации урока ОНЗ на примере содержания пункта 3.1.1. «Последовательности. Способы задания последовательностей.».

В этом пункте учащиеся уточняют свои представления о числовой последовательности, знакомятся с определением члена последовательности, первого члена последовательности, общего члена последовательности, уточняют смысл индексных обозначений. Учащиеся знакомятся со способами задания числовой последовательности, они учатся находить члены последовательности, заданной формулой *n*-го члена и заданной рекуррентно.

Урок открытия новых знаний выстраивается в соответствии с требованиями технологии деятельностного метода Л.Г. Петерсон. На этапе мотивации учитель может предложить учащимся обсудить эпиграф к этому пункту. Далее учитель сообщает, что тема, которую они начнут изучать с сегодняшнего урока, пригодится им в жизненных ситуациях. Так, новые знания, полученные учащимися, они смогут применить, например, для расчета суммы кредита.

После чего учитель организует актуализацию нужных для открытия знаний с помощью выполнения заданий (№464 – №465). Далее учащимся следует разъяснить смысл понятия бесконечной числовой последовательности, познакомить с понятием члена последовательности, первого члена последовательности, общего члена последовательности, уточнить смысл индексных обозначений (при этом учащиеся работают с последовательностями, заданными словесно или перечислением). Для **самостоятельного открытия** аналитического способа задания последовательностей (рекуррентного способа и с помощью формулы общего члена) рекомендуется использовать задание №466.

Рассмотрим пример*структуры открытия нового знания:*

*1. Новое знание:* аналитический способ задания последовательностей (рекуррентной формулой и формулой общего члена)

*2. Актуализация.*

*Актуализировать опыт* работы с рядами чисел.

*Уточнить:* представления о бесконечной числовой последовательности, смысл индексных обозначений.

*Ввести:* понятие члена последовательности, первого члена последовательности, общего члена последовательности.

*3. Задание на пробное действие:*

Последовательность чисел задана перечислением первых ее членов.

*уn*: 3, 9, 27,…

Укажите еще три способа, которыми можно задать эту последовательность.

*4. Фиксация затруднения*:

Я не могу указать, какими еще способами можно задать эту последовательность

Я не могу перечислить все способы.

Я не могу обосновать, что правильно указал способы.

*5. Фиксация причины затруднения*:

Не известны способы задания числовых последовательностей.

*6. Цель учебной деятельности:*

Выявить способы задания числовых последовательностей.

*7. Фиксация нового знания:*

Учащиеся должны выявить аналитический способ задания последовательностей (рекуррентной формулой и формулой общего члена).

*Открыть* новое знание учащиеся могут с использованием текста задания № 466.

На *этапе первичного закрепления* рекомендуется выполнить задания №467(а), №468, №470 (а), №471(а); для *самостоятельной работы* учащимся можно предложить №467(б), №470(б), 471(б).

На *этапе включения в систему знаний* рекомендуется выполнить №469, № 473 или №474. После чего в более подготовленном классе рекомендуется организовать знакомство учащихся с числовой последовательностью, как с частным случаем функции (можно использовать для этого текст учебника).

В зависимости от уровня подготовленности класса на этапе *повторения* рекомендуется выполнить одно из заданий №475 – №478. На этапе *рефлексии* учащимся предлагается оценить процесс и результат своей работы на уроке.

Кроме урока открытия нового знания, основные структурные элементы которого рассмотрены выше, планированием предусмотрены и другие типы уроков: *уроки рефлексии тренировочного и коррекционного типа*, где учащиеся вырабатывают и закрепляют свое умение применять новые понятия и способы действий, учатся самостоятельно выявлять и исправлять свои ошибки, корректировать свою учебную деятельность.

В течение изучения третьей главы учащимся предлагается два экспресс-теста, которые можно использовать для урока рефлексии или в качестве домашней работы.

Планированием также предусмотрены и уроки *обучающего контроля*. Перед проведением контрольной работы рекомендуется провести урок рефлексии с использованием содержания соответствующего раздела «Задачи для самоконтроля».

**Уважаемые коллеги!**

**Далее мы предлагаем рассмотреть примеры решения некоторых заданий первого параграфа второй главы.**

**№ 473**

Для того, чтобы задать последовательность рекуррентно, необходимо найти первые члены данной последовательности. Первый член равен –3, каждый последующий получается из предыдущего умножением на –3. Опишем её: *а*1= –3; *а*2= –3*а*1; *а*3= –3 *а*2; … *а*n+1= –3 *аn*; … .

Ясно, что для задания этой последовательности достаточно указать её первый член *а*1= –3, а каждый следующий член вычисляется по формуле: *аn*+1= –3 *аn.*

**№490.**

а) Заметим, что . Так как последовательность  строго убывает, то  строго возрастает.

б) Заметим, что . Чтобы исследовать последовательность с положительными членами на возрастание, можно рассмотреть отношение  и сравнить его с единицей. Для рассматриваемой последовательности . При *n*=1 выполняется равенство, а при *n*>1 выполняется неравенство . Поэтому последовательность  нестрого возрастает. Также можно сказать, что последовательность  строго возрастает со 2 номера.

в) = .

Домножив на сопряженное, преобразуем выражение для . Получим .

Разделим числитель и знаменатель на *n*. Получим .

Последовательность  строго убывает. Значит, строго убывает и последовательность . Но тогда  строго возрастает.

Ответ: а) строго возрастает; б) нестрого возрастает, строго возрастает со 2 номера; в) строго возрастает.

**№ 513**

Для того, чтобы найти разность прогрессии, при которой произведение *х*4∙*х*8 является наибольшим, составим уравнения.

Если *х*7 = 3, то *х*7 = *х*1 + 6*d* = 3;

Рассмотрим произведение *х*4∙*х*8= (*х*1 + 3*d*)(*x*1 + 7*d*)=(*x*1 + 6*d* – 3*d*)(*x*1 + 6*d* + *d*) =(3 – 3*d*) (3 + *d*)

Найдем, при каком значении d произведение (3–3*d*)(3+*d*) является наибольшим, для этого преобразуем произведение:

(3 – 3*d*)(3 + *d*) = –3(*d*2 + 2*d* – 3)= –3((*d* + 1)2 –4)

При *d* = –1 выражение будет принимать наибольшее значение.

**№ 548**

Для нахождения первого и девятого членов арифметической прогрессии, воспользуемся формулой суммы *n*-го члена арифметической прогрессии



*a*1 = 54,8

*a*9 = 54,8 – 4 ∙ 8 =22,8

**№ 584**

Для того, чтобы определить является ли данная последовательность геометрической прогрессией, воспользуемся формулой *n*–го члена.

Если *b*8 = 12, а *b*12 = –8

12 = *b*1  ∙ *q*7

–8 = *b*1 ∙*q*11

Подставим первое уравнение во второе: 12 ∙ *q*4 = –8 ⇔ *q*4 = –1,5 – уравнение не имеет решений.

Данная последовательность не является геометрической прогрессией.

**№607**

Для того, чтобы задать последовательность формулой n-го члена и найти сумму первых пяти её членов, необходимо найти знаменатель.

Для этого найдём *b*2 = –3, тогда *q* = –3.

Получим *bn* = 1∙(–3)*n*–1

*bn* = –

.

**№630 (а)**

Представим бесконечную периодическую десятичную дробь (0,(2)) в виде суммы разрядных слагаемых:

0,222…= 0,2 + 0,02 + 0,002 + …

Представлена сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии

Найдём знаменатель этой прогрессии: *q* = 0,02 : 0,2=0,1

Воспользуемся формулой для нахождения суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии:

0,(2)=

**№641**

а) Данная последовательность – арифметико-геометрическая прогрессия, у которой , , . Подставим эти значения в формулу общего члена арифметико-геометрической прогрессии: .

б) Данная последовательность – арифметико-геометрическая прогрессия, у которой , , . Подставим эти значения в формулу общего члена арифметико-геометрической прогрессии: .

Ответ: а) ; б) .

**Ниже мы предлагаем вам рассмотреть решение некоторых задач на смекалку, которые входят во второй параграф рассмотренной главы.**

**№492.\***

Заметим, что все члены последовательности не меньше 1.

Докажем, что последовательность монотонно возрастает. Заметим, что .

Покажем, что если , то . Заметим, что , 

Рассмотрим разность , так как . Тогда . Но . Значит, , что и требовалось.

Покажем теперь, что последовательность ограничена.

Очевидно, что .

Докажем, что . Доказательство проведем по индукции.

База индукции. При *n*=1 .

Пусть . Тогда , что и требовалось.

**№532.\***

Пусть *a* – один из членов прогрессии, а *d* – её разность. По условию, числа  *a*(*a* + *d*)  и  *a*(*a* + 2*d*)  – также члены прогрессии; значит, их разность имеет вид *nd* при некотором целом *n*, то есть  *ad = nd*.  Поскольку  *d* > 0,  получаем  *a = n*,  то есть *a* – целое число.

**№599.\***

Пусть *a* – первое из двух чисел исходной последовательности, *d* – разность арифметической прогрессии, а *q* – знаменатель геометрической прогрессии. Тогда по условию задачи *a* + *d* = *aq*, *a* + 9*d* = *aq*2.

Следовательно, *a*(*q* – 1) = *d* и *a*(*q* – 1)(*q* + 1) = *a*(*q*2 – 1) = 9*d* = 9*a*(*q* – 1). Поскольку *q*≠1, отсюда получаем *q* = 8 и *aq*3 = *a* + *a*(*q*3 – 1) = *a* + *a*(*q* – 1)(*q*2 + *q* + 1) = *a* + 73*d*. Таким образом, четвертый член геометрической прогрессии совпал с 74-м членом арифметической прогрессии.

Ответ: совпал с 74-м членом.

**№622.\***

Пусть *b*1 – первый член прогрессии, а *q* – ее знаменатель.

Составим систему, соответствующую условию задачи:

.

Преобразуем:

 .

Разделим второе уравнение на первое:



Преобразуем:

.

Разделив первое уравнение на второе, получим уравнение относительно неизвестного *q*:

.

Его решениями будут .

Если , то , ,, и сумма кубов этих трех членов прогрессии равна 57.

Если , то , ,, и сумма кубов этих трех членов прогрессии также равна 57.

Ответ: 57.